# Ensembles et applications

## Table des matières

# 1 Théorie des ensembles

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1 :** *Ensemble et appartenance*

Un **ensemble** $E$ est une collection d'objets. Les objets qui constituent $E$ sont appelés les éléments de $E$. On note $x \in E$, lu "$x$ appartient à $E$", si $x$ est un élément de $E$. On note $x \notin E$, lu "$x$ n'appartient pas à $E$" sinon.

**Remarque 1.2 :** *Notation d'un ensemble*

Un ensemble peut être défini par la liste de ses éléments entre accolades.

**Exemple 1.** *Lorsqu'un ensemble contient peu d'éléments, il est d'usage de tous les écrire.* $\{1, 5, 7\}$ *est un ensemble à* $3$ *éléments.*

**Exemple 2.** *Lorsqu'un ensemble contient beaucoup, voire une infinité d'éléments, on peut utiliser des pointillés. Le contexte permet de déterminer ce qui est sous-entendu. Ainsi,*

- $\{1, 2, \ldots, 20\}$ *désignera vraisemblablement l'ensemble des entiers de* $1$ *à* $20$ *(aussi noté* $[\![1, 20]\!]$*),*
- $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble de tous les entiers naturels (aussi noté* $\mathbb{N}$*),*
- $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ *l'ensemble de tous les entiers relatifs (aussi noté* $\mathbb{Z}$*).*

**Exemple 3.** *Outre cette écriture en extension des ensembles, on peut les écrire en compréhension. Par exemple, si* $E = \{0, 2, 4, \ldots\}$*, on peut l'écrire* $E = \{n \in \mathbb{N} \, \textit{tel que} \, n \, \textit{est pair}\}$ *ou* $E = \{n \in \mathbb{N}, \, n \, \textit{est pair}\}$ *ou encore* $E = \{n \in \mathbb{N} \, | \, n \, \textit{est pair}\}$.

**Définition 1.3 :** *Ensemble vide*

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **l'ensemble vide**. Il est noté $\emptyset$.

**Définition 1.4 :** *Ensembles usuels de nombres*

Les ensembles de nombres forment une classe très importante d'ensembles en mathématiques. Les ensembles suivants sont à connaître.

- $\mathbb{N}$ : l'ensemble des **entiers naturels**,
- $\mathbb{Z}$ : l'ensemble des **entiers relatifs**,
- $\mathbb{Q}$ : l'ensemble des **nombres rationnels**,
- $\mathbb{R}$ : l'ensemble des **nombres réels**.

Ces ensembles de nombres peuvent être modifiés par des signes divers. On utilise un astérisque en exposant pour indiquer l'ensemble auquel on a retiré le zéro.

**Exemple 4.** $\mathbb{N}^*$ *est l'ensemble des entiers naturels non nuls.*

Lorsque l'on ne considère que les nombres positifs ou négatifs, on utilise un signe $+$ ou un signe $-$.

**Exemple 5.** $\mathbb{R}_+$ *désigne l'ensemble des réels positifs.* $\mathbb{R}_+^*$ *désigne l'ensemble des réels strictement positifs.*

**Remarque 1.5 :** *Notation d'un intervalle d'entiers*

- Si $n \leq m$ sont deux entiers, alors $[\![n, m]\!]$ est l'ensemble des entiers compris entre $n$ et $m$ inclus. En compréhension, on écrit
$$[\![n, m]\!] = \{i \in \mathbb{Z},\, n \leq i \leq m\}.$$
- On note $[\![n, +\infty[\![$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à $n$ et $]\!]-\infty, n]\!]$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à $n$. On a par exemple
$$[\![n, +\infty[\![= \{i \in \mathbb{Z},\, n \leq i\}.$$

**Remarque 1.6 :** *Notation d'un intervalle de réels*

- Si $x \leq y$ sont deux réels, alors $[x, y]$ est l'ensemble des réels compris entre $x$ et $y$ inclus.
$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R},\, x \leq t \leq y\}.$$
On note $]x, y]$ si on exclut $x$, $[x, y[$ si on exclut $y$, et $]x, y[$ si on exclut les deux. On a par exemple
$$]x, y[= \{t \in \mathbb{R},\, x < t < y\}.$$
- De même que précédemment, on a les notations $]-\infty, x]$, $]-\infty, x[$, $[x, +\infty[$ et $]x, +\infty[$.

Les ensembles de nombres sont certes très importants mais il ne faut pas penser que ce sont les seuls. Durant l'année, on considèrera, entre autres, des ensembles de fonctions, des ensembles de matrices et des ensembles d'ensembles.

**Exemple 6.** *$E = \{f$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a, b$ et $c$ des réels$\}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.*

## 1.2 Inclusion

**Définition 1.7 :** *Sous-ensemble*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Si $\forall x \in E,\, x \in F$ alors on dit que $E$ est inclus dans $F$. On note $E \subset F$ l'inclusion de $E$ dans $F$. On dit alors que $E$ est un **sous-ensemble** de $F$ (ou une **partie** de $F$).

**Exemple 7.** *On a la chaîne d'inclusion entre les ensembles usuels de nombres*
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

**Propriété 1.8 :** *Inclusion*

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. On a les propriétés suivantes :

- (Réflexivité) $E \subset E$,
- (Transitivité) si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$,
- (Antisymétrie) si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.

Ces trois propriétés confèrent à l'inclusion le statut de relation d'ordre, permettant ainsi de comparer certains ensembles entre eux.

- (Minorant) $\emptyset \subset E$.

Attention, il ne faut pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.

**Exemple 8.** *Si $E = \{1, 2, 3\}$, on a $2 \in E$ mais $\{2\} \subset E$.*

## 1.3 Ensemble des parties

**Définition 1.9 :** *Ensemble des parties*

**L'ensemble des parties** de $E$, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de $E$.

**Propriété 1.10 :** *Ensemble des parties*

Soit $E$ un ensemble :

$$E \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad \emptyset \in \mathcal{P}(E).$$

De plus, on a toujours l'équivalence suivante :

$$A \subset E \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{P}(E).$$

**Exemple 9.** $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

**Exemple 10.** $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

**Exemple 11.** $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

**Exemple 12.** *Déterminer l'ensemble* $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

***Solution.***

## 1.4 Opérations sur les ensembles

Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit les opérations suivantes : intersection, union, passage au complémentaire, différence.

### 1.4.1 Intersection et union

**Définition 1.11 :** *Intersection*

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. L'**intersection** de $A$ et $B$ est le sous-ensemble de $E$, noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

$A \cap B$ est constitué des éléments qui sont à la fois dans $A$ et dans $B$.
Si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que $A$ et $B$ sont **disjoints**.

**Définition 1.12 :** *Union*

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. L'**union** de $A$ et $B$ est le sous-ensemble de $E$, noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

$A \cup B$ est constitué des éléments qui sont dans au moins l'un des ensembles $A$ ou $B$.

**Exemple 13.** *Représenter sur un diagramme (dit diagramme de Venn) les ensembles* $A \cap B$ *et* $A \cup B$.

***Solution.***

**Propriété 1.13 :** *Intersection et union*

Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. On a les propriétés qui suivent.

- (Associativité) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (Commutativité) $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- (Distributivité) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- (Idempotence) $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$
- (Éléments neutres) $A \cup \emptyset = A$
  $A \cap E = A$
- (Éléments absorbants) $A \cup E = E$
  $A \cap \emptyset = \emptyset$

*Démonstration.* À démontrer en exercice à partir des propriétés équivalentes sur les propositions logiques (voir Chapitre *Logique et raisonnements mathématiques*). □

Les propriétés d'associativité de l'union et de l'intersection montre qu'il n'est pas nécessaire de mettre des parenthèses lorsque l'on considère une union d'unions, ou bien lorsque l'on considère une intersection d'intersections. Par contre, les parenthèses sont essentielles lorsque l'on considère une intersection d'unions ou une union d'intersections.

**Définition 1.14 :** *Famille d'ensembles*

Soient $I$ et $E$ deux ensembles. Pour $i \in I$, soit $A_i$ une partie de $E$. On appelle famille de parties (ou d'ensembles) de $E$, indexée par $I$, la famille $(A_i)_{i\in I}$.

**Exemple 14.** *Dans le cas* $I = [\![1, n]\!]$*, la famille d'ensembles* $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est la famille* $(A_1, A_2, \dots, A_n)$*.*

**Remarque 1.15 :** *Généralisation à une famille d'ensembles*

On généralise aisément l'intersection et l'union à une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et on note

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \text{et} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Cette notation s'étend même à une famille quelconque d'ensembles : si $I$ est un ensemble d'indices, et si pour tout $i \in I$, $A_i$ est un ensemble, on note alors

$$\bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i.$$

**Propriété 1.16 :** *Lien avec l'inclusion*

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. On a toujours l'ordre suivant :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

De plus,

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

### 1.4.2 Passage au complémentaire, différence

**Définition 1.17 :** *Passage au complémentaire*

Soit $A$ une partie de $E$. Le **complémentaire** de $A$ est le sous-ensemble de $E$, noté $\overline{A}$, défini par :

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

$\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$.

**Définition 1.18 :** *Différence*

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. La **différence** de $A$ et $B$ est le sous-ensemble de $E$, noté $A \setminus B$ et lu "$A$ moins $B$", défini par :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

$A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de $A$ qui n'appartiennent pas à $B$.

**Exemple 15.** *Représenter sur un diagramme de Venn les ensembles $\overline{A}$ et $A \setminus B$.*

***Solution.***

**Propriété 1.19 :** *Passage au complémentaire*

Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$. Le complémentaire de $A$ vérifie les propriétés qui suivent.

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ;

**Propriété 1.20 :** *Lois de De Morgan*

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. On a les propriétés qui suivent.

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

*Démonstration.* Les lois de Morgan se démontrent à l'aide de la propriété équivalente sur les propositions logiques (voir Chapitre *Logique et raisonnements mathématiques*). □

### 1.5 Produit cartésien

**Définition 1.21 :** *Produit cartésien*

Soit $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de $E$ et $F$, noté $E \times F$ et lu "$E$ croix $F$", l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit,

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } (x \in E) \wedge (y \in F)\}.$$

**Définition 1.22 :** *Généralisation à une collection d'ensembles*

Plus généralement, soient $n$ ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, est l'ensemble des $n$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

**Exemple 16.** *Avec $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, déterminer et représenter $A \times B$ et $B \times A$.*

***Solution.***

**Remarque 1.23 :** *Notation*

Le produit cartésien d'un ensemble $E$ avec lui-même est noté $E^2 = E \times E$, et plus généralement le produit cartésien de $n$ fois le même ensemble $E$ est noté $E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

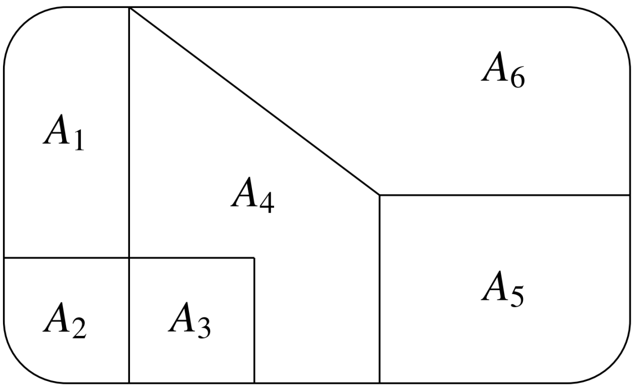
**Exemple 17.** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

### 1.6 Partition d'un ensemble

**Définition 1.24 :** *Partition d'un ensemble*

Soit $(Ai)_{i \in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par un ensemble $I$. On dit que cette famille forme une **partition de** $E$ si et seulement si les trois propositions suivantes sont vérifiées :

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$,
- $\forall (i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\forall i \in I,\ \bigcup_{i \in I} A_i = E$.




**Exemple 18.** *L'ensemble des entiers naturels pairs et des entiers naturels impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.*

**Exemple 19.** *Les intervalles* $[0, 1[$, $[1, 3]$, $]3, 4]$ *forment une partition de l'intervalle* $[0, 4]$.

**Exemple 20.** *Donner une partition de* $\mathbb{R}^2$ *en trois ensembles.*

***Solution.***

# 2 Applications

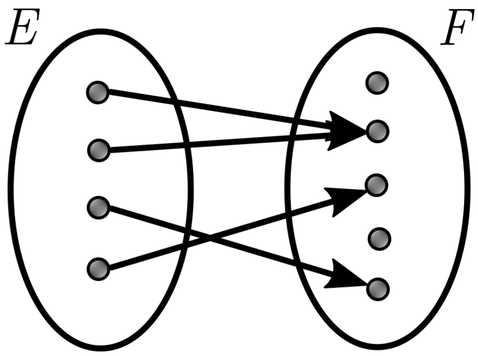
## 2.1 Définitions

**Définition 2.1 :** *Application*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une **application** de $E$ (**l'ensemble de départ**) dans $F$ (**l'ensemble d'arrivée**) est une relation entre les éléments de ces ensembles qui associe à chaque élément $x$ de $E$ un **unique** élément $y$ de $F$. Si $f$ est une application de $E$ dans $F$, on note $f : E \to F$ et pour plus de précision :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Ceci se lit "$f$ de $E$ dans $F$ qui à $x$ associe $f(x)$". On appelle **image** de $x$ l'élément $y = f(x)$ et on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$. L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{A}(E, F)$.




Une application est caractérisée par le fait que chaque élément de l'ensemble de départ admet une unique image. Par contre, un élément de l'ensemble d'arrivée peut admettre plusieurs antécédents ou aucun.

**Exemple 21.** *On a l'application exponentielle.*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

**Exemple 22.** *On a l'application valeur absolue.*

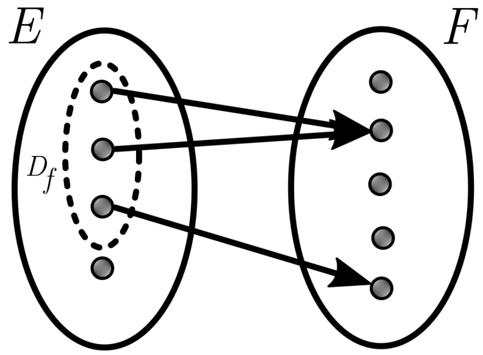
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

**Exemple 23.** *Soit $E$ un ensemble. On peut définir **l'application identité** de $E$ dans $E$ via*

$$\begin{array}{rcl} Id_E : E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

**Remarque 2.2 :** *Fonction*

La notion de fonction est un peu plus générale que la notion d'application puisqu'il n'est pas nécessaire dans sa définition que tout élément de $E$ ait une image, alors que c'est nécessaire pour une application. Une application est une fonction dont l'ensemble de définition, noté $D_f$, est égal à l'ensemble de départ.




**Exemple 24.** *Si on considère*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

*$f$ est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$.*

**Définition 2.3 :** *Égalité de deux applications*

Deux applications $f$ et $g$ sont **égales** si et seulement si elles ont le même ensemble de départ $E$, le même ensemble d'arrivée $F$ et que :

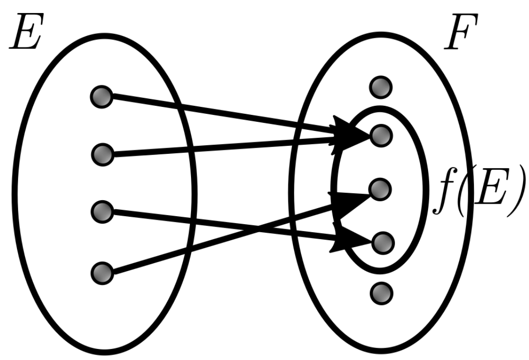
$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

## 2.2 Ensemble image

**Définition 2.4 :** *Ensemble image*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f$ une application de $E$ dans $F$. On appelle **ensemble image** (ou simplement **image**) de $f$, le sous-ensemble de $F$ défini par :

$$f(E) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in E, f(x) = y\}.$$



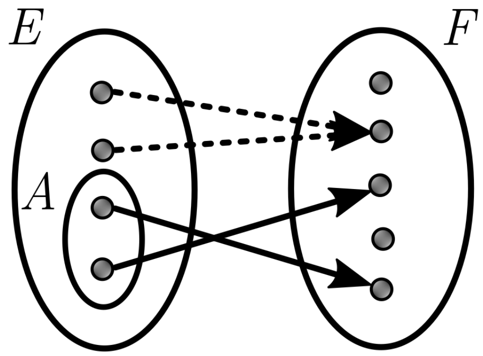
L'ensemble image de $f$ est l'ensemble des images de tous les éléments de $E$. On dira que $f$ est **à valeurs** (ou **prend ses valeurs**) dans $f(E)$.

### 2.3 Restriction et prolongement d'une application

**Définition 2.5 :** *Restriction d'une application*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $A$ une partie de $E$ et $f : E \to F$. On appelle **restriction de $f$ à $A$** l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f|_A : & A & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

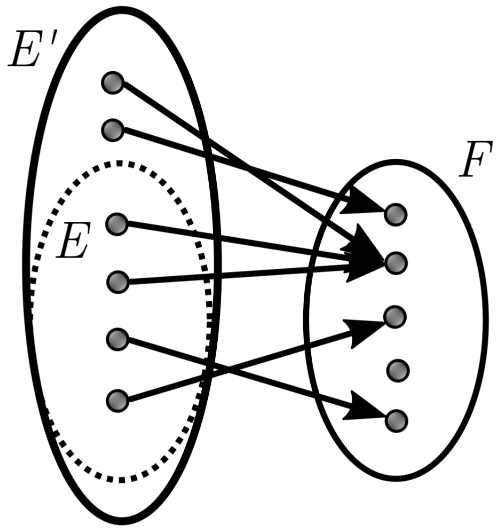



**Définition 2.6 :** *Prolongement d'une application*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $E \subset E'$ et $f : E \to F$. Un **prolongement de $f$ à $E'$** est une application $\tilde{f} : E' \to F$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \tilde{f}(x) = f(x).$$

C'est à dire une application telle que $\tilde{f}\Big|_E = f$.



**Exemple 25.** *Donner un exemple de prolongement à $\mathbb{R}$ de l'application inverse définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

***Solution.***

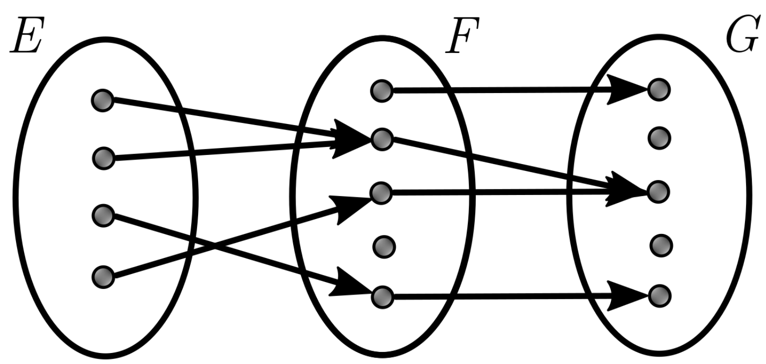
## 2.4 Composition d'applications

**Définition 2.7 :** *Composée de fonctions*

Soient $E$, $F'$, $F$ et $G$ quatre ensembles, $f : E \to F'$ et $g : F \to G$. On suppose que $f(E) \subset F$. On appelle composée de $g$ avec $f$ l'application $g \circ f$, lu "$g$ rond $f$", définie par :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g\left(f(x)\right) \end{array}$$

Il faudra toujours vérifier que l'ensemble image (ou l'ensemble d'arrivée) de $f$ est bien inclus dans l'ensemble de départ de $g$.




**Exemple 26.** *Soient $f$ et $g$ deux applications définies par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^2(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \left]-\infty, 1\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x} \end{array}$$

*On remarque que $f$ est à valeurs dans $[0,1]$, qui est inclus dans l'ensemble de départ de $g$. L'application $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$ par*

$$g \circ f(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = |\cos(x)|\,.$$

**Exemple 27.** *Soient $f$ et $g$ deux applications définies par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$$

*Déterminer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.*

***Solution.***

La relation de composition n'est à priori pas commutative. Sauf cas particulier, $f \circ g \neq g \circ f$ et il est possible qu'une seule des deux soit définissable.

**Propriété 2.8 :** *Associativité de la composition*

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

La relation de composition est associative.

Cette propriété d'associativité de la composition nous permettra donc d'ôter les parenthèses. On écrira simplement $h \circ g \circ f$.

**Exemple 28.** *Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par*

$$\varphi(t) = \frac{t-3}{t+1}.$$

*Déterminer $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$.*

***Solution.***

**Propriété 2.9 :** *Élement neutre pour la composition*

Soit $f : E \to F$. Alors :

$$f \circ Id_E = Id_F \circ f = f.$$

Les preuves des propriétés précédentes découlent directement des définitions.

## 2.5 Applications injectives, surjectives, bijectives

Les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sont des propriétés essentielles des applications. Elles sont présentes dans la plupart des chapitres du cours.

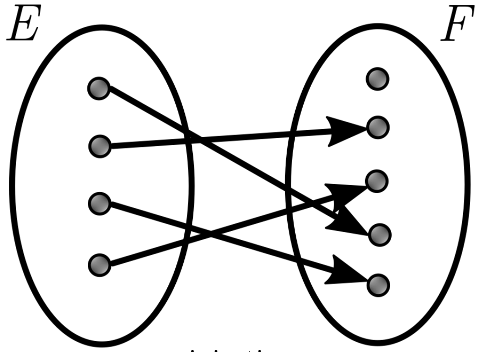
### 2.5.1 Applications injectives

**Définition 2.10 :** *Application injective*

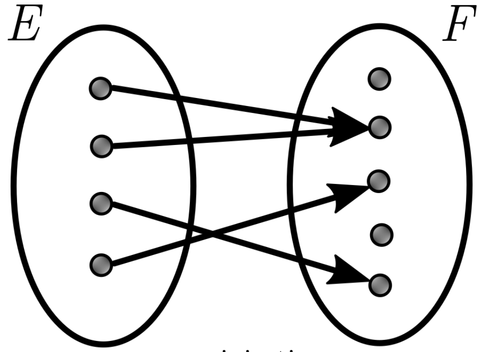
Soit $f : E \to F$. On dit que $f$ est une **injection** (ou qu'elle est **injective**) si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Cette définition signifie que tout élément de $F$ a au plus un antécédent par $f$.




injective




non injective

**Exemple 29.** *Donner une définition équivalente de l'injectivité en utilisant une contraposée.*

***Solution.***

**Exemple 30.** *L'application $x \mapsto x^2$ est une injection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Représenter cette application sur un graphique.*

***Solution.***

**Exemple 31.** *Montrer que l'application* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n'est pas injective.*

***Solution.***

**Propriété 2.11 :** *Injectivité*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors :

(i) $f$ et $g$ injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective

(ii) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

*Démonstration.* (i) On suppose que $f$ et $g$ sont injectives.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
L'équation $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ s'écrit également

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Comme $g$ est injective,

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Enfin, comme $f$ est injective, on obtient

$$x_1 = x_2.$$

On en conclut que $g \circ f$ est injective.

(ii) On suppose que $g \circ f$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
On compose par $g$ de chaque côté de l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ :

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Comme $g \circ f$ est injective, on obtient

$$x_1 = x_2.$$

On en conclut que $f$ est injective.

□

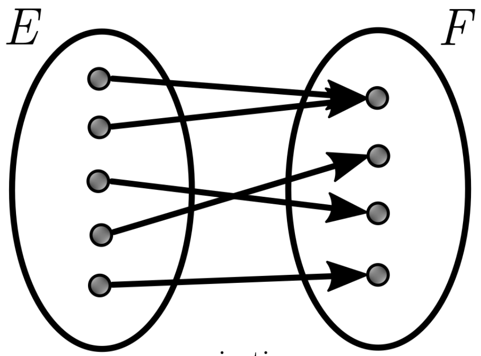
### 2.5.2 Applications surjectives

**Définition 2.12 :** *Application surjective*

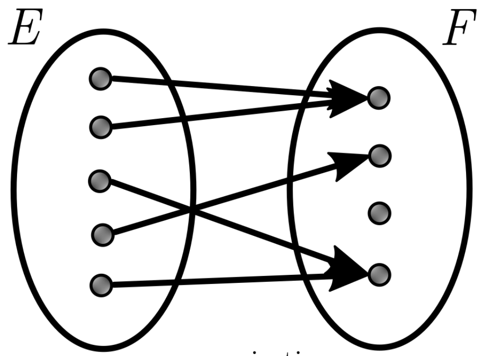
Soit $f : E \to F$. On dit que $f$ est une **surjection** (ou qu'elle est **surjective**) si et seulement si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \text{ tel que } f(x) = y.$$

Cette définition est le pendant de la définition de l'injectivité. Elle signifie que tout élément de $F$ a au moins un antécédent par $f$.



surjective



non surjective

**Exemple 32.** *L'application* $x \mapsto x^2$ *est une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *mais ce n'est pas une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Représenter cette application sur un graphique.*

***Solution.***

**Exemple 33.** *Lesquelles des applications suivantes sont surjectives ?*

- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$,
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,
- $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

***Solution.***

**Propriété 2.13 :** *Surjectivité*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors :

(i) $f$ et $g$ surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective

(ii) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

*Démonstration.* (i) On suppose que $f$ et $g$ sont surjectives.
Montrons que $\forall z \in G, \exists x \in E,$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.
Soit $z \in G$. Comme $g$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que

$$g(y) = z.$$

De plus, comme $f$ est surjective, il existe donc $x \in E$ un antécédent de $y$ par $f$ tel que

$$f(x) = y.$$

Ainsi, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que

$$g(f(x)) = z.$$

On en conclut que $g \circ f$ est surjective.

(ii) On suppose que $g \circ f$ est surjective.
Montrons que $\forall z \in G, \exists y \in F,$ tel que $g(y) = z$.
Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que

$$(g \circ f)(x) = z,$$

ce qui s'écrit également

$$g(f(x)) = z.$$

On pose $y = f(x)$. Ainsi $y \in F$ et vérifie

$$g(y) = z.$$

On en conclut que $g$ est surjective.

$\square$

### 2.5.3 Applications bijectives

**Définition 2.14 :** *Bijectivité*

Soit $f : E \to F$. On dit que $f$ est une **bijection** (ou qu'elle est **bijective**) si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

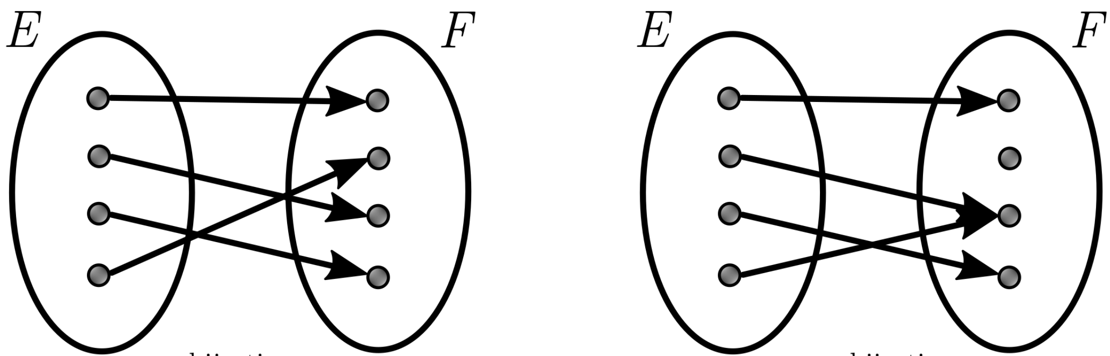
**Exemple 34.** *L'application $x \mapsto x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.*

**Propriété 2.15 :** *Bijectivité*

Soit $f : E \to F$. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ est une bijection} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F,\, \exists! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Cette propriété est la combinaison des définitions de l'injectivité et de la surjectivité. Elle signifie que tout élément de $F$ a exactement un antécédent par $f$.




bijective

non bijective

*Démonstration.* ($\Rightarrow$) On suppose que $f$ est bijective. Ainsi $f$ est injective et surjective. Comme $f$ est surjective, pour $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que

$$f(x) = y.$$

Comme $f$ est injective, cet antécédent est unique.
($\Leftarrow$) Si pour $y \in F$, $\exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$, alors $f$ est surjective, et l'unicité assure l'injectivité de $f$. On en conclut que $f$ est bijective. ☐

**Exemple 35.** *On considère*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1}. \end{array}$$

*Montrer que $f$ est une bijection.*

***Solution.***

**Théorème 2.16 :** *Bijection réciproque*

Soit $f : E \to F$. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ est une bijection} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe une unique application } g : F \to E \text{ telle que } g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

$g$ est également une bijection, appelée **bijection réciproque** (ou **inverse**) de $f$, et on la note $f^{-1}$.

*Démonstration.* (⇒) On suppose que $f$ est bijective. On sait que

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \text{ tel que } f(x) = y.$$

Soit $y \in F$. On appelle $g(y)$ l'unique élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$. Cela définit bien une application $g : F \to E$ qui vérifie

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

Prouvons maintenant l'unicité de $g$. On suppose qu'une autre application $h : F \to E$ vérifie ces conditions

$$h \circ f = Id_E \text{ et } f \circ h = Id_F.$$

Soit $y \in F$. Comme $f$ est bijective, il existe $x$ tel que $y = f(x)$. Et comme $g \circ f = h \circ f = Id_E$, $g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y)$. Ainsi $g = h$ et $g$ est bien l'unique application réciproque.

(⇐) Comme $Id_F$ est bijective, elle est surjective. Ainsi $f$ est surjective par la propriété 2.13. De même, $Id_E$ est bijective donc injective et $f$ est injective par la propriété 2.11 : $f$ est donc bijective. □

**Remarque 2.17 :** *Attention !*

La notation $f^{-1}$ n'a de sens que si $f$ est une application bijective. Avant de l'écrire, il faut donc d'abord s'assurer du caractère bijectif de $f$.

Lorsque $f$ est bijective, on a

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

**Exemple 36.** *Soit* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. *Montrer que* $f$ *est bijective et déterminer* $f^{-1}$.

***Solution.***

**Propriété 2.18 :** *Composée de bijections*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives. Alors :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

*Démonstration.* On a :

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ Id_F \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E.$$

De même, $(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = Id_F$. D'après le théorème 2.16 de la bijection réciproque, $f^{-1} \circ g^{-1}$ est donc l'unique application définissant la bijection réciproque de $g \circ f$. □

Le théorème suivant permet de montrer facilement qu'une fonction réelle est bijective. Nous reverrons ce résultat et sa démonstration dans le chapitre sur la continuité.

**Théorème 2.19 :** *Théorème de la bijection monotone*

Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors $f$ définit une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$.

**Exemple 37.** *L'application* $f : x \mapsto \cos(x)$ *réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$. *En effet,* $f$ *est continue et strictement décroissante de* $[0, \pi]$ *à valeurs dans* $[-1, 1]$. *Pour rappel,*

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad f'(x) = -\sin(x) < 0.$$

# 3 Cardinalité

Le cardinal d'un ensemble permet de caractériser le nombre d'éléments d'un ensemble. Si la notion semble banale pour les ensembles finis, elle l'est un peu moins dans le cas d'ensembles infinis. En effet, que cela signifierait-il que deux ensembles aient le même nombre d'éléments alors que ce nombre est infini ?

**Définition 3.1 :** *Cardinal*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ et $F$ ont même cardinal s'il existe une bijection de $E$ dans $F$.

On capture ainsi l'idée intuitive que $E$ et $F$ ont "autant d'éléments".

## 3.1 Ensemble dénombrable

**Définition 3.2 :** *Ensemble dénombrable*

Soit $E$ un ensemble. On dit que $E$ est un ensemble dénombrable s'il existe une bijection de $E$ dans $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$ dans $E$).

Pour un ensemble dénombrable $E$, on peut faire correspondre un unique entier naturel. On peut donc "numéroter" les éléments de $E$ avec tous les entiers naturels.

**Exemple 38 (Paradoxe de l'hôtel de Hilbert).** *Supposons qu'un hôtel fictif possède un nombre infini de chambres toutes occupées. Malgré cela, l'hôtelier peut toujours accueillir un nouveau client.*

*En effet supposons que les chambres soient numérotées par tous les nombres entiers (à partir de* $0$*). Il suffit que l'hôtelier demande à l'occupant de la première chambre de s'installer dans la seconde, à celui de la seconde de s'installer dans la troisième, et ainsi de suite. Les clients déjà logés le restent. La première chambre est libre et peut accueillir le nouveau client. Ce résultat utilise la bijection de l'application :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto n+1. \end{aligned}$$

*Mais l'hôtelier peut aussi accueillir une infinité de nouveaux clients. Pour ce faire, il faut que le client occupant la chambre n^o^ 1 prenne la chambre n^o^ 2, l'occupant de la n^o^ 2 la n^o^ 4, celui de la n^o^ 3 la n^o^ 6, et ainsi de suite. Chacun occupe une chambre de numéro double de celui de sa chambre précédente, de telle sorte que toutes les chambres de numéro impair deviennent libres. Et puisqu'il existe une infinité de nombres impairs, l'infinité de nouveaux clients pourra occuper les chambres correspondantes. On utilise cette fois ces deux applications bijectives avec* $\mathbb{P}$ *(respectivement* $\mathbb{I}$*) l'ensemble des entiers naturels pairs (resp. impairs) :*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h : \mathbb{N} &\to \mathbb{I} \\ n &\mapsto 2n+1. \end{aligned}$$

*L'hôtel de Hilbert illustre que deux ensembles infinis tels que l'un est strictement inclus dans l'autre peuvent être de même cardinal.*

**Exemple 39.** *Les ensembles* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables.*

Un résultat très important montré par Cantor à la fin du XIXe siècle est que l'ensemble des réels est non dénombrable. Cette découverte, nommée la diagonale de Cantor, a énormément marqué les mathématiques, montrant ainsi que certains infinis sont strictement plus grands que d'autres.

**Exemple 40.** *Les ensembles* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ne sont pas dénombrables.*

## 3.2 Ensemble fini

### 3.2.1 Définition et propriétés

**Définition 3.3 :** *Ensemble fini*

Soient $E$ un ensemble et $n$ un entier non nul. On dit que $E$ est de cardinal fini égal à $n$ s'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $E$. On écrit $card(E) = n$, lu "cardinal de $E$ égal à $n$".

**Remarque 3.4 :** *Ensemble vide*

On dit que l'ensemble vide est de cardinal fini nul. On écrit $card(\emptyset) = 0$, lu "cardinal de l'ensemble vide égal à 0".

Le cardinal d'un ensemble fini n'est rien d'autre que son nombre d'éléments.

**Définition 3.5 :** *Vocabulaire*

Un ensemble de cardinal 1 est appelé **singleton**. Un ensemble de cardinal 2 est appelé **une paire**.

**Propriété 3.6 :** *Partie d'un ensemble fini*

Soient $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $A$ une partie de $E$. Alors $A$ est de cardinal fini et $card(A) \leq n$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

*Démonstration.* Admise. □

### 3.2.2 Principe additif

**Proposition 3.7 :** *Cardinal d'une réunion disjointe*

Soient $A$ et $B$ deux parties finies d'un ensemble $E$. Si $A$ et $B$ sont disjoints, alors :

$$card\,(A \cup B) = card(A) + card(B).$$

*Démonstration.* On pose $card(A) = p$ et $card(B) = q$ . Si $A$ et $B$ sont disjoints, alors on peut numéroter les éléments de $A$ de 1 à $p$ et les éléments de $B$ de $p + 1$ à $p + q$ et cela donne une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1, p + q]\!]$. Ainsi $card\,(A \cup B) = p + q$. □

**Corollaire 3.8 :** *Cardinal du complémentaire*

Si $A$ est une partie d'un ensemble fini $E$, alors

$$card\left(\overline{A}\right) = card(E) - card(A).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la proposition précédente : on a une partition de $E$ avec $E = A \cup \overline{A}$. Ainsi $card(E) = card(A) + card\left(\overline{A}\right)$. □

**Théorème 3.9 :** *Formule du crible (ou de Poincaré) pour deux parties*

Soient $A$ et $B$ deux parties finies d'un ensemble $E$. Alors :

$$card\,(A \cup B) = card(A) + card(B) - card\,(A \cap B)\,.$$

*Démonstration.* On remarque que

$$A \cup B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)\,.$$

Comme c'est une union disjointe, c'est une partition de $A \cup B$. Ainsi, d'après la proposition 3.7

$$card(A \cup B) = card\left(\overline{A} \cap B\right) + card\left(A \cap \overline{B}\right) + card\,(A \cap B)\,. \tag{1}$$

De plus,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

C'est une partition de $A$, donc d'après la proposition 3.7

$$card(A) = card(A \cap B) + card(A \cap \overline{B})$$

et, de manière analogue,

$$card(B) = card(A \cap B) + card(\overline{A} \cap B).$$

Ainsi, en reprenant l'équation (1)

$$\begin{array}{rcl} card(A \cup B) & = & (card(A) - card(A \cap B)) + (card(B) - card(A \cap B)) + card(A \cap B) \\ & = & card(A) + card(B) - card\,(A \cap B)\,, \end{array}$$

ce qui est le résultat souhaité. □

**Théorème 3.10 :** *Formule du crible pour trois parties*

Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties finies d'un ensemble $E$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} card\,(A \cup B \cup C) & = & card(A) + card(B) + card(C) \\ & - & card\,(A \cap B) - card\,(A \cap C) - card\,(B \cap C) \\ & + & card\,(A \cap B \cap C)\,. \end{array}$$

*Démonstration.* Démonstration à faire en exercice en utilisant la formule du crible pour deux parties (théorème 3.9). □

**Exemple 41.** *Dans un lycée de* 300 *élèves,* 152 *pratiquent le football,* 83 *le rugby et* 51 *le tennis. De plus,* 24 *pratiquent à la fois foot et rugby,* 14 *font foot et tennis, et* 8 *rugby et tennis. Enfin, 3 élèves pratiquent les trois sports simultanément. On note $A$ (resp. $B$ et $C$) l'ensemble des élèves pratiquant le football (resp. le rugby et le tennis). Le nombre d'élèves sportifs est alors de*

$$\begin{array}{rcl} card\,(A \cup B \cup C) & = & card(A) + card(B) + card(C) \\ & - & card\,(A \cap B) - card\,(A \cap C) - card\,(B \cap C) \\ & + & card\,(A \cap B \cap C) \\ & = & 152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 243 \end{array}$$

### 3.2.3 Principe multiplicatif

**Proposition 3.11 :** *Cardinal d'un produit cartésien*

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et :

$$card\,(E \times F) = card(E) \times card(F).$$

*Démonstration.* On ne va pas faire de preuve rigoureuse pour cette proposition, simplement décrire la manière dont cela fonctionne. Soient $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

| | $e_1$ | $e_2$ | $\ldots$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $(e_1, f_1)$ | $(e_2, f_1)$ | $\ldots$ | $(e_n, f_1)$ |
| $f_2$ | $(e_1, f_2)$ | $(e_2, f_2)$ | $\ldots$ | $(e_n, f_2)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $f_p$ | $(e_1, f_p)$ | $(e_2, f_p)$ | $\ldots$ | $(e_n, f_p)$ |

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

**Corollaire 3.12 :** *Cardinal d'un produit cartésien*

Soient $E$ un ensemble fini et $n$ un entier naturel. Alors :

$$card\,(E^n) = card\,(E)^n\,.$$

*Démonstration.* On obtient le résultat par récurrence en utilisant la proposition précédente et en remarquant que $E^{n+1} = E^n \times E$. □